

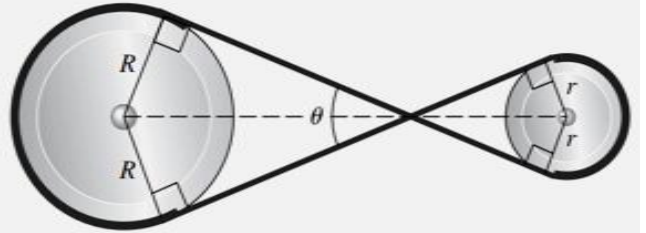
Geometriai feladatok keresztezett szíjhajtásra

Az [1] műben találtuk az alábbi feladatot – 1. ábra. Erről eszünkbe jutottak az alábbiak.

68. Belts and Pulleys A thin belt of length L surrounds two pulleys of radii R and r , as shown in the figure to the right.

(a) Show that the angle θ (in rad) where the belt crosses itself satisfies the equation

$$\theta + 2 \cot \frac{\theta}{2} = \frac{L}{R+r} - \pi$$



1. ábra – forrása: [1]

1. feladat

Adott egy vékony, L hosszúságú szíj, melyről feltesszük, hogy elegendően erős és hajlékony, így alkalmas hajtóelemnek. Ezt az 1. ábra szerint átvetjük a R és r sugarú tárcsákon. Igazoljuk, hogy ekkor a θ szögre fennáll az alábbi (*) egyenlet!

$$\theta + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{L}{R+r} - \pi \quad (*)$$

Megoldás

Ennek alapgondolata: az 1. ábrán jelölt rész - szíjhosszak összege éppen kiadja az ismert L szíjhosszat. Képlettel:

$$L = 2 \cdot R \cdot \pi - 2 \cdot R \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + 2 \cdot r \cdot \pi - 2 \cdot r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + \\ + 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) ,$$

$$L = R \cdot \pi + r \cdot \pi + \theta \cdot (R + r) + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot (R + r) ,$$

$$L = (R + r) \cdot \pi + \theta \cdot (R + r) + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot (R + r) , \text{ innen:}$$

$$\underline{L = (R + r) \cdot \left(\pi + \theta + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) .} \quad (1)$$

Most (1) -ből és az 1. ábráról is:

$$\underline{\underline{\theta + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{L}{R+r} - \pi , \quad 0 < \theta < \pi .}} \quad (2)$$

adódik, ami megegyezik (*) - gal.

Ezzel az 1. feladatot megoldottuk.

2. feladat

A keresztezett szíjhajtásra adottak az R, r, t adatok; utóbbi a két tárcsa középpontjának a távolsága. Határozzuk meg az L szíjhosszat!

Megoldás

A t távolságra az 1. ábra alapján is írhatjuk, hogy:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{R}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{r}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{R+r}{\sin \frac{\theta}{2}} \rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{R+r}{t}, \text{ tehát:}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R+r}{t} \rightarrow \frac{\theta}{2} = \arcsin \left(\frac{R+r}{t} \right) \rightarrow \underline{\theta = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{R+r}{t} \right)}. \quad (3)$$

Most (2) szerint:

$$L = (R + r) \cdot \left[\pi + \theta + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right]; \quad (2)$$

ehhez, (3) - mal is:

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1} = \sqrt{\left(\frac{t}{R+r} \right)^2 - 1}, \text{ azaz:}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{t}{R+r} \right)^2 - 1}; \quad (4)$$

majd (2), (3) és (4) - gyel:

$$L = (R + r) \cdot \left[\pi + 2 \cdot \arcsin \left(\frac{R+r}{t} \right) + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{t}{R+r} \right)^2 - 1} \right],$$

$$\underline{\underline{L = 2 \cdot (R + r) \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{R+r}{t} \right) + \sqrt{\left(\frac{t}{R+r} \right)^2 - 1} \right]}}. \quad (5)$$

Ezzel a 2. feladatot is megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. Azt találtuk, hogy a 2. feladat az adatok behelyettesítésével közvetlenül megoldható. Nem ez a helyzet az 1. feladatnál, mert ott a (2) trigonometriai egyenlet grafikus / numerikus megoldására szorulunk rá. Ezt gyakoroljuk a 3. feladatban.

3. feladat

Adott az 1. ábra szerinti keresztezett szíjhajtás, az alábbi adatokkal:

$$R_1 = 1 \text{ m} , R_2 = 1/2 \text{ m} , L = 12 \text{ m} . \quad (A)$$

Határozzuk meg a keresztezés θ szögét, radiánban és fokban is!

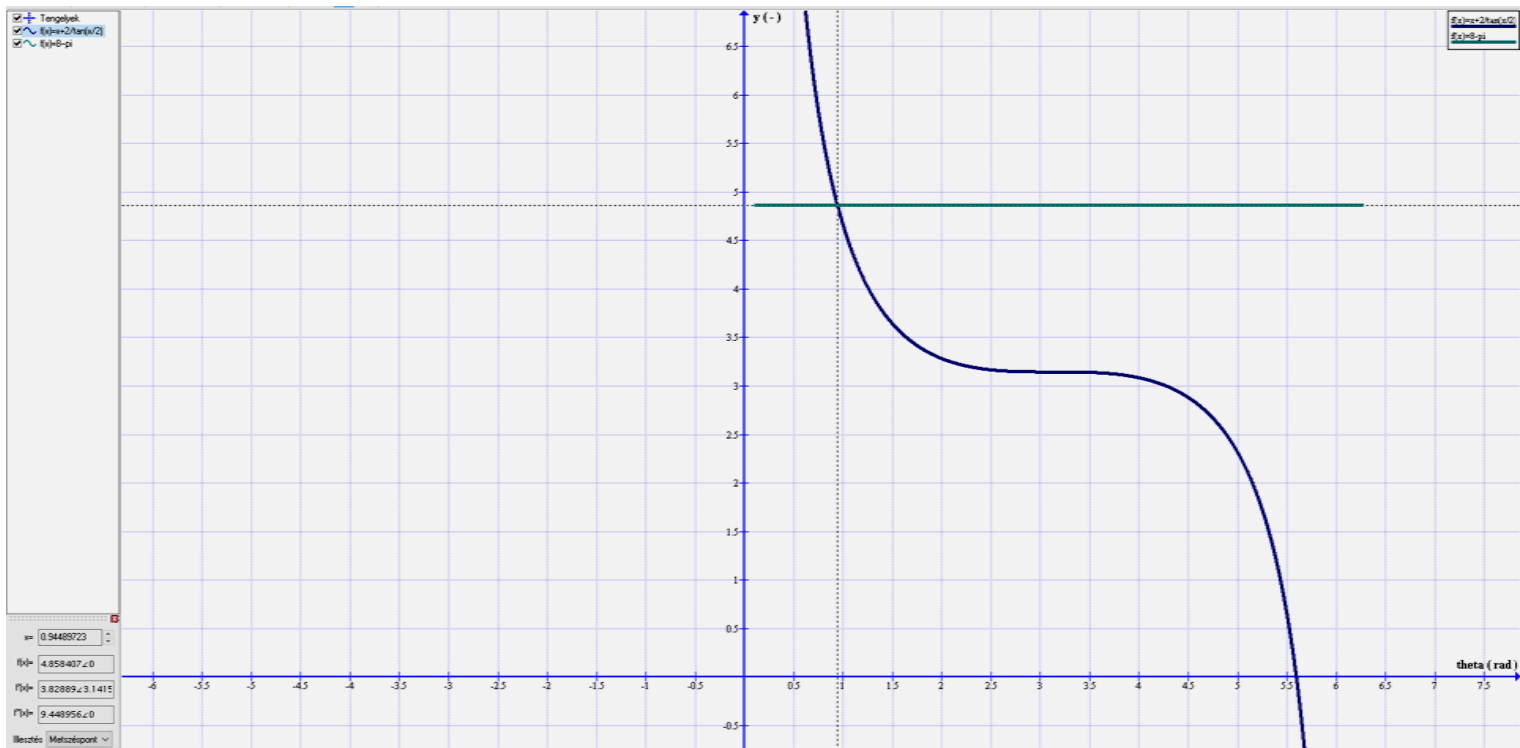
Megoldás:

A (2) képlettel és (A) - val a megoldandó egyenlet így fest:

$$\theta + 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{L}{R+r} - \pi = \frac{12}{3/2} - \pi = 8 - \pi , \text{ innen:}$$

$$\theta + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = 8 - \pi . \quad (a)$$

Az (a) egyenlet grafikus megoldását mutatja a 2. ábra.



2. ábra

A 2. ábráról leolvasható, hogy:

$$\underline{\underline{\theta_0 = 0.94489723 \text{ (rad)}}} , \quad (e1)$$

illetve:

$$\theta_0 = 0.94489723 \text{ (rad)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ (rad)}} = 54,13862335^\circ \approx 54,1^\circ, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\theta_0 \approx 54,1^\circ}}. \quad (\text{e2})$$

Tehát az (A) adatokkal bíró elrendezés esetén a szíjhajtás keresztezési szöge mintegy **54,1 °**.

Mint hogy erről az eredményről ránézésre nem tudjuk megmondani, hogy jó - e, ezért igyekszünk valamilyen ellenőrzést végezni, a korábbi eredmények felhasználásával.

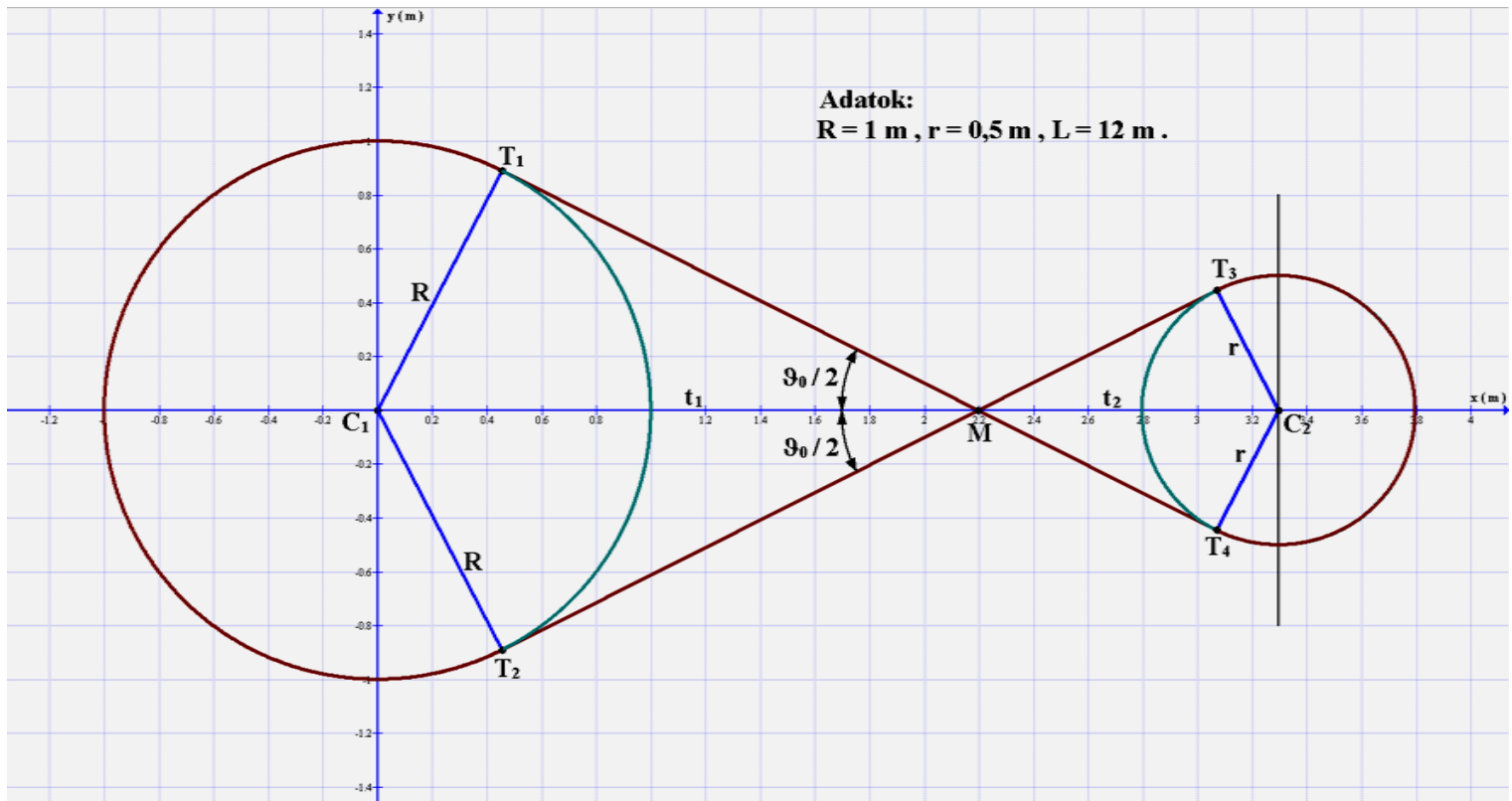
Először (3 / 1), (e1) és (A) szerint:

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \frac{R+r}{t} \rightarrow \frac{R+r}{t} = \sin \left(\frac{1}{2} \cdot 54,13862335^\circ \right) = 0,455068033 \rightarrow$$

$$t = \frac{1+0,5}{0,455068033} \text{ m} = 3,296210437 \text{ m}, \text{ tehát:}$$

$$t = 3,296210437 \text{ m}. \quad (\text{b})$$

Az adatokkal és eredményekkel készült a 3. ábra.

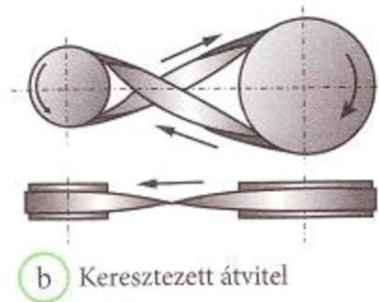


3. ábra

Látjuk, hogy minden pontosan a helyén van, vagyis a megoldás sikeres volt. Ugyanis ez véletlenül nem jön össze.

M2. Hasonló feladatokat az idők során már megoldottunk. Nem baj, az ismétlés sosem árt.

M3. A valós keresztezett szíjhajtás szíjai a 2. ábra **M** pontja környezetében elmennek egymás mellett. Ezek szerint az elrendezés nem teljesen síkbeli – 4. ábra.



4. ábra – forrása: [2]

M4. Ahogy írásunk címe is sejteti, itt csak a keresztezett szíjhajtás egy - két geometriai kérdésével foglalkoztunk. A tényleges gépészeti probléma ennél lényegesen összetettebb.

M5. Korábbi írásaink a szíjhajtás témakörében az alábbiak:

~ **Richard – II.** , (*)

~ **Megint a szíjhajtásról.** (**)

.....

Ajánlott olvasmányok:

(*) https://galgoczi.net/anyagok/Richard_II.pdf

(**) <https://galgoczi.net/anyagok/Megint%20a%20szijhajtasrol.pdf>

Források:

[1] – **James Stewart ~ Lothar Redlin ~ Saleem Watson:** Precalculus
7. ed., CENGAGE Learning, 2016.

[2] – https://muszakiesinformatikaineveles.files.wordpress.com/2015/08/img_0008.jpg

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2022. 02. 15.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>